**Herleitung Kraftwerkssimulation**

Glossar Ausgleichsbecken

|  |  |
| --- | --- |
|  | Fläche des Zuflusses = Grundfläche Becken |
|  | Fläche des Ausflusses = Rohrleitungsquerschnitt |
|  | Pegel im Ausgleichsbecken |
|  | Masse im Ausgleichsbecken |
|  | Statischer Druck in der Druckrohrleitung |
|  | Zufluss ins Becken |
|  | Abfluss aus dem Becken |
|  | Dichte der Flüssigkeit |
|  | Zeit |
|  | Schwerpunktgeschwindigkeit der Masse im Becken |
|  | Zuflussgeschwindigkeit ins Ausgleichbecken |
|  | Ausflussgeschwindigkeit aus Ausgleichsbecken |

Ausgleichbecken

Ausflusssimulation des Ausgleichsbeckens in Anlehnung an   
[Hydraulik 7: Die Ausflusstheorie von A. Malcherek - YouTube](https://www.youtube.com/watch?v=8HO2LwqOhqQ&list=PLeJlNT9hA2Py1bTrxZ2B9XzTaweAeVta8&index=8)

Start sind die Massen und Impulsbilanz des Beckens.

Die Massenbilanz ergibt sich aus der Differenz aus Zufluss und Abfluss:

Die Impulsbilanz bzw. die Änderung des Gesamtimpulses im Becken mit der Zeit ist gegeben durch die angreifenden Kräfte und die Impulsflüsse:

Wobei:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Gewichtskraft des Wassers im Becken |
|  | Zufließender Impuls |
|  | Abfließender Impuls |
|  | Kraft des Beckenbodens auf den Inhalt |
|  | Kraft des Druckrohrleitungsdrucks |

Der Beitrag des Luftdrucks wurde weggelassen, weil sich die Kräfte die er auswirkt direkt aufheben.

Zusammenfassen der Terme der Gewichtskraft und der Kraft des Beckenbodens ergibt für die Änderung des Impulses dann

Weil allgemein gilt, dass der Impuls als *Masse mal Schwerpunktsgeschwindigkeit* ausgedrückt werden kann, folgt daraus

Gleichsetzen der beiden Gleichungen für ergibt eine Gleichung, die in weiterer Folge auf umgestellt werden kann.

Unter der Annahme eines stationären (Zwischen-)Zustands folgt aus der Kontinuitätsgleichung, dass man die Schwerpunktsgeschwindigkeit *v* durch folgenden Ausdruck ersetzen kann:

Einsetzen und Division durch liefert dann:

Zusammenfassend ergibt sich daraus die Differentialgleichung für die Ausflussgeschwindigkeit, bei der das Quadrat der Ausflussgeschwindigkeit durch das vorzeichenerhaltende Produkt ersetzt wurde:

-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Diese lässt sich numerisch lösen, wenn man , den statischen Druck in der Druckrohrleitung, kennt.

Um nun konsistent aus dem Pegel im Ausgleichsbecken abzuleiten, startet man wieder bei der Impulsbilanz.

Im stationären (Zwischen-)Zustand ist die Änderung des Impulses null. Einfaches Umstellen nach ergibt dann:

Da, wie oben beschrieben (einmal) ersetzt werden kann, folgt schlussendlich

Die Verwendung der Geschwindigkeitsbeträge garantiert ein physikalisch sinnvolles verhalten. Wenn die Flüssigkeit mit höherer Geschwindigkeit aus dem Becken fließt als hinein, ist der dynamische Druck am Ausfluss höher als am Einfluss. Deswegen muss der statische Druck niedriger sein, als   
, was von der obigen Formel erfüllt wird.

Glossar Druckrohrleitung

|  |  |
| --- | --- |
|  | Querschnittsfläche der Druckrohrleitung |
|  | Höhenwinkel der Druckrohrleitung |
|  | Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druckwelle  in der Druckrohrleitung |
|  | Durchmesser der Druckrohrleitung |
|  | Elastizitätsmodul des Systems Rohrleitung-Wassersäule |
|  | Erdbeschleunigung |
| Subskript *i* | Wert der Variable am *i*-ten Knoten |
| Superskript *j* | Wert der Variablen zum Zeitpunkt *j* |
|  | Rohrreibungszahl/Darcy-friction factor |
|  | Statischer Druck in der Druckrohrleitung |
|  | Dichte der Flüssigkeit |
|  | Zeit |
|  | Zeitschritt in Charakteristikenmethode |
|  | Flussgeschwindigkeit in der Druckrohrleitung |
|  | Ortsvariable |
|  | Abstand zwischen den Diskretisierungsknoten |

Druckrohrleitung

Druckstoßsimulation mit der Charakteristiken-Methode nach   
<https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/baug/ifu/env-fluid-mechanics-dam/documents/NumHyd/NumHyd_2_pressure_surge.pdf>

Aus dem Kurs

[Numerical Hydraulics – Chair of Environmental Fluid Mechanics | ETH Zurich](https://efm.ifu.ethz.ch/education/numerical-hydraulics.html)

Startpunkt sind die Kontinuitäts- und Impuls-Gleichung für ein Kontrollvolumen („Druckrohrleitungsscheibe“).

Für die Kontinuitätsgleichung (der Masse pro Längeneinheit)

gilt unter Anwendung der Produktregel

Division durch die Querschnittsfläche *A* und Umstellen der Terme führt zu

Da die Dichte und Querschnittsfläche *A* druckabhängig sind, können die jeweiligen Ableitungen nach Ort und Zeit durch die Kettenregel ausgedrückt werden um die Druckabhängigkeit explizit darzustellen. Anwendung der Kettenregel auf die partiellen Ableitungen von und ergibt:

Sammeln der Terme für die Ableitungen nach dem Druck führt zu

Durch Herausheben der Klammer und Division durch die Dichte erhält man

Diese Formulierung der Kontinuitätsgleichung ist vorteilhaft, weil man über Verwendung des Elastizitätsmoduls die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druckwelle in die Formel bringt.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit *c* ist dabei gegeben durch

Wobei der effektive Elastizitätsmodul des Systems Rohrleitung+Wassersäule ist und gilt[[1]](#footnote-1)

Dementsprechend kann die Kontinuitätsgleichung für einen Kontrollzylinder als

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

geschrieben werden.

Die Impulsgleichung (pro Volumeneinheit) lautet

Wobei

|  |  |
| --- | --- |
|  | Die Impulsänderung mit der Zeit |
|  | Den Impulsfluss aus und ins Kontrollvolumen |
|  | Die Gravitationskraft |
|  | Die Druckkraft |
|  | Die Reibungskraft |

Beschreibt.

Division durch die Dichte führt zu

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Gleichungen (1) und (2) werden nun für die Charakteristikenmethode zu zwei neuen Gleichungen wie folgt linear kombiniert

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1\*) |
|  | (2\*) |

Und ergeben somit

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1\*) |
|  |  |
|  | (2\*) |
|  |  |

Zusammenfassen der Ableitungen des Drucks und der Geschwindigkeit liefert

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1\*) |
|  |  |
|  | (2\*) |
|  |  |

Und mit einem Vorzeichenwechsel in Gleichung (2\*) und umsortieren kommt man zu

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1\*) |
|  |  |
|  | (2\*) |
|  |  |

Außerdem kann man in guter Näherung annehmen, dass ist, und somit schreiben, dass

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1\*) |
|  |  |
|  | (2\*) |
|  |  |

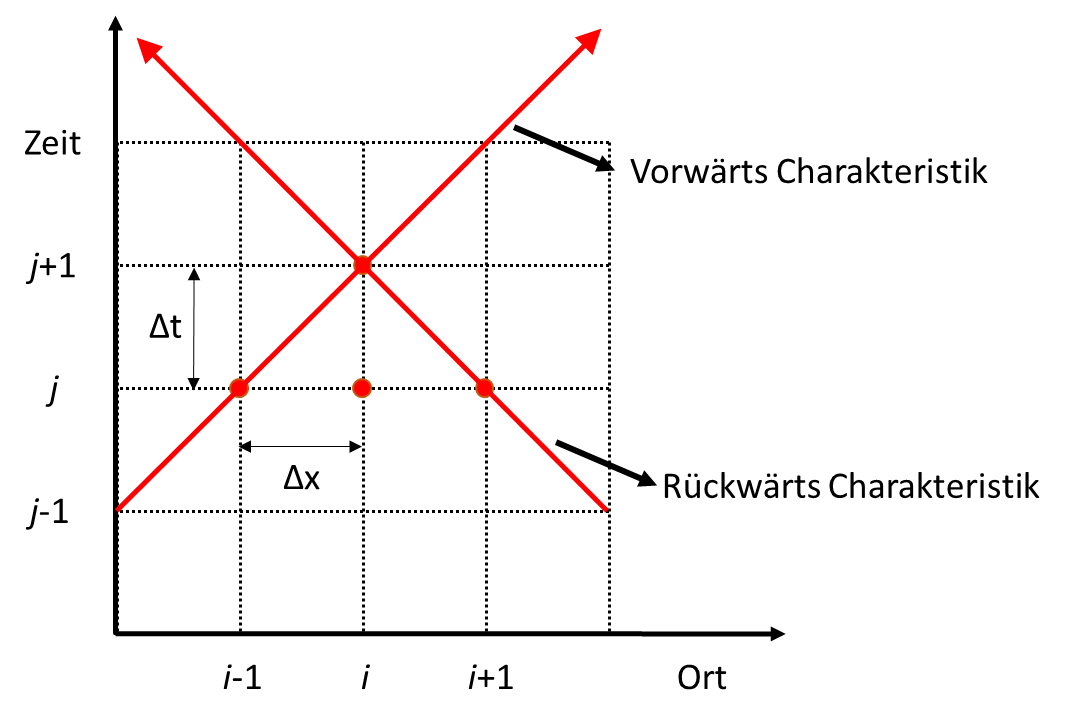
Einschub numerische Diskretisierung in der Charakteristikenmethode

Um die Gleichungen der Druckrohrleitung (mit einem Computer) numerisch zu behandeln, muss das System örtlich und zeitlich diskretisiert, also in kleine Teilstücke zerlegt werden.

Diese Teilstücke sind von Knoten begrenzt und haben den örtlichen Abstand und den zeitlichen Abstand . Wichtig ist dabei, dass und über die Schallausbreitungsgeschwindigkeit zusammenhängen. Die Geschwindigkeit mit der Informationen über Druck und Flussgeschwindigkeit an einem Knoten an die anderen Knoten weitergegeben wird, ist nämlich genau die Schallgeschwindigkeit im Medium *c*.  
Das heißt, dass

Bzw.

Aus dieser Beziehung leitet sich dann auch die für das Charakteristikenverfahren namensgebene Charakteristik ab. In unserem Fall entspricht eine (vorwärts) Charakteristik *x(t)* einer Gerade durch die (Zeit-)Punkte (*i,j*) und (*i+1,j+1*) geht. Per Konstruktion breitet sich eine Druckwelle immer entlang solcher Charakteristiken aus.



Folgt man also der Druckwelle entlang der (vorwärts) Charakteristik *x(t)* erreicht man in einem Zeitschritt vom Punkt (*i-1,j*) aus genau den Punkt (*i,j+1*). Nennt man nun folglich die Zeitableitung einer Funktion *u(x,t)* im Koordinatensystem der vorwärts Charakteristik , kann man diese auch über die partiellen Ableitungen im stationären Koordinatensystem der Rohrleitung ausdrücken

Setzt man für die partiellen Ableitungen die finiten Differenzen ein

|  |  |
| --- | --- |
|  | Finite örtliche vorwärts Differenz zum Zeitpunkt *j* |
|  |  |
|  | Finite örtliche rückwärts Differenz zum Zeitpunkt *j* |
|  |  |
|  | Finite zeitliche vorwärts Differenz am Ort *i* |
|  |  |

Erhält man

Ende Einschub numerische Diskretisierung in der Charakteristikenmethode

Verwendet man nun die Zeitableitung entlang der vorwärts Charakteristik für Gleichung (1\*) und die entlang der rückwärts Charakteristik für Gleichung (2\*) folgt

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1\*) |
|  |  |
|  | (2\*) |
|  |  |

Setzt man nun für die Zeitableitungen entlang der Charakteristiken die finiten Differenzen von oben ein (und nimmt an, dass der Reibungsterm am Ort *i* von der Geschwindigkeit am Ort zum vorherigen Zeitpunkt j) erhält man nach Division durch die Dichte

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1\*) |
|  |  |
|  | (2\*) |
|  |  |

Mit diesen beiden Gleichungen kann man nun die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung in der Druckrohrleitung lösen.

Praktisch passiert das, in dem man die Druckrohrleitung wie im Einschub beschrieben in N Knoten unterteilt. Die Lösung der Charakteristikenmethode differenziert nun zwischen den Randknoten und den Knoten „innerhalb“ der Druckrohrleitung.

Für die Nicht-Rand-Knoten ergeben sich Gleichungen für die Geschwindigkeit und die Drücke am Knoten *i* zum Zeitpunkt *j+1* indem man Gleichungen (1\*) und (2\*) addiert/subtrahiert.

-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Für die Randknoten folgt die Lösung aus der vorwärts(1\*)/rückwärts(2\*) Charakteristik und einer weiteren Randbedingung. Am Ausgleichsbecken wird der Randdruck vom statischen Druck am unteren Ende des Beckens bestimmt. Wie man diesen ermittelt wurde oben bereits ausführlich beschrieben. Beim Unterlieger Kraftwerk ist als Randbedingung die Flussgeschwindigkeit durch den Durchfluss gegeben. Es folgt also

-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. Siehe Folie 14 [↑](#footnote-ref-1)